Concours National Commun
Session 2015
Filière PSI
Épreuve de Mathématiques II : Un corrigé [1]

Première partie
Résultats préliminaires

Dorénavant $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ ***désigne la base canonique*** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$***.***

1.1.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-d \end{vmatrix} = (X-a)(X-d) - bc = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A),$$

donc

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} &\iff A \text{ possède deux valeurs propres réelles distinctes} \\ &\iff \chi_A \text{ possède deux racines réelles distinctes} \\ &\iff \Delta = (\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det A > 0, \end{aligned}$$

ainsi $\mathcal{U} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ (\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det A > 0 \right\}$.

1.1.2. Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}(A) = a + d \quad \text{et} \quad \det(A) = ad - bc,$$

donc les applications $A \longrightarrow \operatorname{tr}(A)$ et $A \longrightarrow \det(A)$ sont polynomiales en les coefficients de A, dès lors elles sont continues.

1.1.3.
- La matrice diagonale $A = \operatorname{diag}(1, 0)$ possède deux valeurs propres réelles distinctes, à savoir 0 et 1, donc $A \in \mathcal{U}$ et par suite $\mathcal{U} \neq \emptyset$.
- Considérons l'application $\varphi : A \longmapsto (\operatorname{tr}(A))^2 - 4\det A$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles. Comme les applications $A \longrightarrow \operatorname{tr}(A)$ et $A \longrightarrow \det(A)$ sont continues d'après la question précédente, alors l'application φ est aussi continue en tant que somme d'applications continues. Par ailleurs, on a [2]

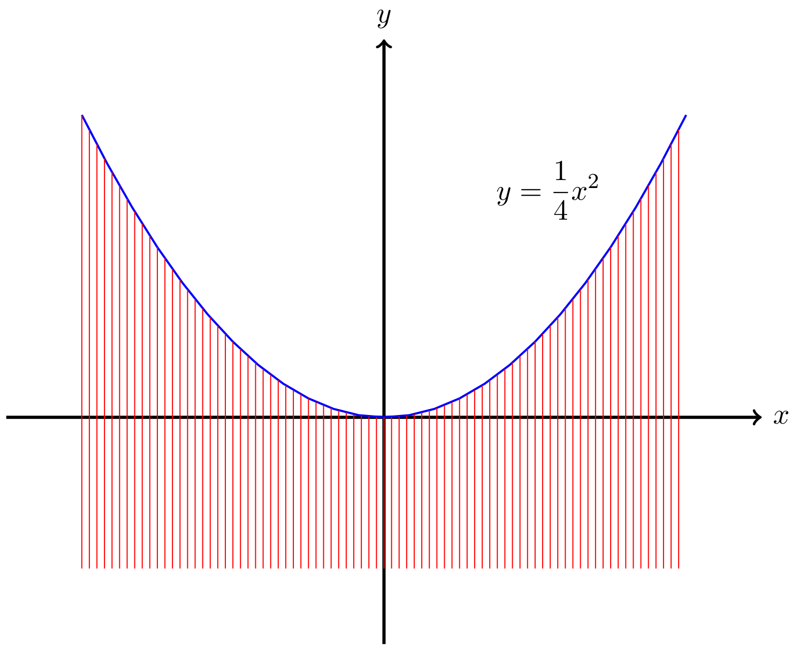
$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ \varphi(A) > 0\} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ \varphi(A) \in]0, +\infty[\} = \varphi^{-1}\left(]0, +\infty[\right)$$

  et, comme $]0 + \infty[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, alors [3] $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.4. D'après la question **1.1.1.** On a

$$\{(\operatorname{tr} A, \det A) \ : \ A \in \mathcal{U}\} = \left\{ (\operatorname{tr} A, \det A) \ : \ \det A < \frac{1}{4}(\operatorname{tr}(A))^2 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < \frac{1}{4}x^2 \right\}.$$

1. Ce corrigé est proposé par Adham Elbekkali, professeur de mathématiques de la classe PCSI 2 au CPGE de Tanger
2. Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $B \subset F$. L'image réciproque de la partie B par l'application f est $f^{-1}(B) = \{x \in E \ : \ f(x) \in B\}$
3. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.



1.1.5. • Soit $A \in \mathcal{U}$, alors A est une matrice carrée réelle d'ordre 2 possédant de valeurs propres réelles distinctes, dès lors A diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$. On a $\chi_M = X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det(M)$, donc

$$\operatorname{Sp}(M) = \left\{ \lambda(M) = \frac{\operatorname{tr}(M) + \sqrt{(\operatorname{tr}(M))^2 - 4\det M}}{2}, \mu(M) = \frac{\operatorname{tr}(M) - \sqrt{(\operatorname{tr}(M))^2 - 4\det M}}{2} \right\}.$$

Déterminons le sous espace propre $E_{\lambda(M)}(M)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
MX = \lambda X \quad & \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax + by = \lambda(M)x \\ cx + dy = \lambda(M)y \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (a - \lambda(M))x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda(M))y = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{\lambda(M) - a}{b}x \\ cx + (d - \lambda(M))y = 0 \end{cases} \qquad \text{car } b \neq 0 \text{ puisque } M \in \mathcal{V} \\
& \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = \dfrac{\lambda(M) - a}{b}x \\ 0 = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \quad y = \frac{\lambda(M) - a}{b}x,
\end{aligned}$$

donc $E_\lambda(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \dfrac{\lambda(M) - a}{b}x \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda(M) - a}{b} \end{pmatrix} \right)$. En échangeant les rôles de $\lambda(M)$

et $\mu(M)$ on trouve $E_{\mu(M)}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\mu(M)-a}{b} \end{pmatrix}\right)$. On déduit la relation de diagonalisation suivante

$$f_1(M)^{-1} M f_1(M) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{avec } f_1(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda(M)-a}{b} & \dfrac{\mu(M)-a}{b} \end{pmatrix}.$$

Comme les applications $M \longmapsto \lambda(M)$ et $M \longmapsto \mu(M)$, définies sur $\mathcal{V}$ et à valeurs réelles, sont continues, alors les applications $M \longmapsto \dfrac{\lambda(M)-a}{b}$, $M \longmapsto \dfrac{\mu(M)-a}{b}$ et $M \longmapsto 1$, définies sur $\mathcal{V}$ et à valeurs réelles, sont aussi continues, du coup l'application $f_1 : \mathcal{V} \longrightarrow E_{1,1} + E_{1,2} + \dfrac{\lambda(M)-a}{b} E_{2,1} + \dfrac{\mu(M)-a}{b} E_{2,2}$, définies sur $\mathcal{V}$ et à valeurs $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est continue.

1.2.1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{C}(B) &\iff MB = BM \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha a & \beta b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} \\
&\iff \beta b = \alpha b \text{ et } \alpha c = \beta c \\
&\iff (\beta - \alpha) b = (\alpha - \beta) c = 0 \\
&\iff b = c = 0, \quad \text{car } \alpha \neq \beta
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{C}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ b = c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \ : \ a, d \in \mathbb{R} \right\}$.

1.2.2. On a

$$\begin{aligned}
UBU^{-1} = VBV^{-1} &\iff (V^{-1}U)B = B(V^{-1}U) \\
&\iff V^{-1}U \in \mathscr{C}(M) \\
&\iff V^{-1}U \text{ est diagonale d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

1.3 Notons C_1 et C_2 les colonnes de la matrices P, et α et β les coefficients diagonaux de D : $D = \text{diag}(\alpha, \beta)$. On a

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP = D &\iff MP = PD \\
&\iff \begin{pmatrix} & & \\ & M & \\ & & \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c|c} MC_1 & MC_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha C_1 + 0 C_2 & 0 C_1 + \beta C_2 \end{array}\right) \\
&\iff \left(\begin{array}{c|c} MC_1 & MC_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha C_1 & \beta C_2 \end{array}\right) \\
&\iff MC_1 = \alpha C_1 \text{ et } MC_2 = \beta C_2 \\
&\iff \alpha \text{ et } \beta \text{ sont les valeurs propres de } M \text{ et } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des vecteurs propres de } M
\end{aligned}$$

Deuxième partie
Quelques propriétés du groupe spécial orthogonal en dimension 2

2.1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a ${}^tAA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned}
A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) &\iff {}^tAA = I_2 \text{ et } \det A = 1 \\
&\iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } ad-bc=1 \\
&\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ (a-d)^2+(b+c)^2=0 \quad \mathrm{L}_2 \leftarrow L_2+L_1-2L_4 \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ d=a \text{ et } c=-b \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ d=a \text{ et } c=-b \\ 0=0 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ d=a \text{ et } c=-b \end{cases},
\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ a^2+b^2=1, d=a \text{ et } c=-b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ : \ a^2+b^2=1 \right\}$.

2.2. • $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ car : $\forall A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, $\det A = 1 \neq 0$.

- $I_2 \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ car ${}^tI_2I_2 = I_2I_2 = I_2$ et $\det I_2 = 1$.
- Soient $A, B \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On a ${}^t(AB)(AB) = {}^tB({}^tBA)B = {}^tBI_2B = {}^tBB = I_2$ et $\det(AB) = \det A \det B = 1$, donc $AB \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
- Soit $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On a ${}^t\left(A^{-1}\right)A^{-1} = \left({}^tA\right)^{-1}A^{-1} = \left(A{}^tA\right)^{-1} = I_2^{-1} = I_2$, donc $A^{-1} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

On en déduit que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2.3.1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\Phi(\theta) = \cos(\theta)E_{1,1} - \sin(\theta)E_{1,2} + \sin(\theta)E_{2,1} + \cos(\theta)E_{2,2},$$

donc l'application Φ est continue puisque cos et sin sont continues.

2.3.2. • Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, donc, en vertu de la question **2.1.**, $\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. D'où l'inclusion $\Phi(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

• Soit $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors, en vertu de la question **2.1.**, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

De $a^2+b^2 = 1$, on déduit l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$, par suite $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \Phi(\theta) \in \Phi(\mathbb{R})$. D'où l'inclusion $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \Phi(\mathbb{R})$.

• Conclusion : $\Phi(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

2.4.1. Puisque l'application $T : M \longmapsto {}^tM$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est linéaire et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, alors [4] elle est continue.

2.4.2. Par définition de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\forall U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad U^{-1} = {}^tU,$$

donc l'application $\varphi : U \longmapsto U^{-1}$, définie sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, est la restriction de l'application $T : U \longmapsto {}^tU$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est continue d'après la question précédente, ainsi l'application $\varphi : U \longmapsto U^{-1}$ est continue.

2.4.3. Considérons les applications $\phi : U \longmapsto UA$ et $\psi : U \longmapsto (\phi(U), \varphi(U)) = (UA, U^{-1})$, définie sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, et $\Psi : (A, B) \longmapsto AB$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de telle sorte que

$$\forall U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \Psi \mathrm{o} \psi(U) = \Psi(\psi(U)) = \Phi\left(UA, U^{-1}\right) = UAU^{-1}.$$

• L'application $U \longmapsto UA$, définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension finie, est linéaire, donc elle continue, par suite sa restriction à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, à savoir ϕ, est continue. Par ailleurs, d'après la question précédente, l'application φ est continue, dès lors l'application $\psi : U \longmapsto (\phi(U), \varphi(U))$ est continue.

• Ψ est une application bilinéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc [5] elle continue.

• Conclusion : l'application $\Delta = \Psi \mathrm{o} \psi : U \longmapsto \Psi \mathrm{o} \psi(U) = UAU^{-1}$ est continue comme composée de deux applications continues.

2.4.4. On considère l'application $\pi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \pi(A) = a.$$

Il est clair que π est linéaire et, comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors π est continue.

Maintenant, considérons l'application $S = \pi \mathrm{o} \sigma \mathrm{o} \Delta \mathrm{o} \Phi$:

$$S : \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\Delta} \mathscr{S}_A \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}.$$

Comme les applications Φ, Δ, σ et π sont continues, alors l'application est aussi continue.

Supposons par l'absurde que σ n'est pas constante. Puisque $\sigma(\mathscr{S}_A) \subset \{B_1, B_2\}$ et σ n'est pas constante,

4. Toute application linéaire d'un espace vectoriel de **dimension finie** vers un autre est continue
5. Tout application bilinéaire d'un espace vectoriel de d**imension finie** vers un autre est continue

alors $\sigma(\mathscr{S}_A) = \{B_1, B_2\}$. D'après la question **2.3.2.**, on a $\Phi(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et, par définition de $\mathscr{S}_A$, on a $\Delta(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) = \mathscr{S}_A$ et enfin $\pi(\{B_1, B_2\}) = \{\alpha, \beta\}$, dès lors $S(\mathbb{R}) = \{\alpha, \beta\}$. Comme S est continue, alors $S(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, ce qui absurde puisque on vient de trouver que $S(\mathbb{R}) = \{\alpha, \beta\}$ et $\{\alpha, \beta\}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Troisième partie
Non continuité de la diagonalisation dans tout l'ouvert $\mathcal{U}$

3.1.1. • Pour simplifier l'écriture on écrit C_1 et C_2 au lieu de $C_1(M)$ et $C_2(M)$.

• Puisque $f^{-1}(M)Mf(M)$ est une matrice diagonale, alors, d'après la question **1.3.**, les vecteurs colonnes de $f(M)$ dont des vecteurs propres associées aux deux valeurs propres distinctes de M.

• Posons $D = f^{-1}(M)Mf(M)$ et notons α, β les coefficients diagonaux de D. Donc $Mf(M) = f(M)D$ et en suite ${}^tf(M)Mf(M) = {}^tf(M)f(M)D$. En transposant les matrices des deux membres de cette égalité et en tenant du fait que $M, S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, on obtient ${}^tf(M)Mf(M) = D^tf(M)f(M)$. En combinant ces deux dernière égalités, on déduit $D^tf(M)f(M) = {}^tf(M)f(M)D$ $(\star)$. Par ailleurs, on a

$$ {}^tf(M)f(M) = \begin{pmatrix} {}^tC_1 \\ \hline {}^tC_2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} {}^tC_1C_1 & {}^tC_1C_2 \\ {}^tC_2C_1 & {}^tC_2C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_1, C_2\rangle \\ \langle C_1, C_2\rangle & \langle C_2, C_2\rangle \end{pmatrix}, $$

donc

$$ D^tf(M)f(M) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_1, C_2\rangle \\ \langle C_1, C_2\rangle & \langle C_2, C_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \beta\langle C_1, C_2\rangle & * \end{pmatrix} \quad (\star\star) $$

et

$$ {}^tf(M)f(M)D = \begin{pmatrix} \langle C_1, C_1\rangle & \langle C_1, C_2\rangle \\ \langle C_1, C_2\rangle & \langle C_2, C_2\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \alpha\langle C_1, C_2\rangle & * \end{pmatrix} \quad (\star\star\star). $$

En combinant $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on déduit que $\alpha\langle C_1, C_2\rangle = \beta\langle C_1, C_2\rangle$ ou encore $(\alpha - \beta)\langle C_1, C_2\rangle = 0$. Il s'ensuit que $\langle C_1, C_2\rangle = 0$ puisque $\alpha \neq \beta$, c.à.d. C_1 et C_2 sont orthogonaux.

3.1.2. On a

$$ \left\| \frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} \right\|_2 = \left\| \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right\|_2 = 1 \text{ et } \left\langle \frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right\rangle = \frac{1}{\|C_1(M)\|_2 \|C_2(M)\|_2} \langle C_1(M), C_2(M)\rangle = 0, $$

donc la matrice dont la première (resp. la deuxième) colonne est $\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ (resp. $\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$) est orthogonale.

3.1.3. Puisque $\alpha(M)$ est le déterminant d'une matrice qui est orthogonale d'après la question précédente, alors $\alpha(M) = \pm 1$. On a $\left\| \alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} \right\|_2 = \left\| \dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right\|_2 = 1$, $\left\langle \alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right\rangle = 0$ et

$$ \det(g(M)) = \det\left(\alpha(M)\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right) = \alpha(M)\det\left(\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right) = \alpha(M)\alpha(M) = 1, $$

donc $g(M) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

3.1.4. • On a

$$ \forall M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R}), \quad g(M) = \left(\alpha(M)\frac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}, \frac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \right). $$

Puisque l'application $f : M \longmapsto f(M) = (C_1(M), C_2(M))$ est continue, alors les applications C_1 et C_2 sont continues, et de plus l'application $\alpha = \det o f$ est continue comme composée de deux applications continues, donc les applications $M \longmapsto \alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2}$ et $M \longmapsto \dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2}$ sont continues et par conséquent l'application g est continue.

- Soient $M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, L_1 et L_2 les lignes de la matrices M et $D = \operatorname{diag}(\lambda, \mu) = f^{-1}(M)Mf(M)$. On a $Mf(M) = f(M)D$, donc

$$\left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} C_1(M) & C_2(M) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_1(M) & C_2(M) \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & \mu \end{array}\right)$$

ou encore

$$\left(\begin{array}{c|c} L_1C_1(M) & L_1C_2(M) \\ \hline L_2C_1(M) & C_2L_2(M) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda C_1(M) & \mu C_2(M) \end{array}\right) \quad \spadesuit.$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
Mg(M) &= \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} & \dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \end{array}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(M)L_1\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} & L_1\dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \\ \alpha(M)L_2\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} & L_2\dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha(M)}{\|C_1(M)\|_2}\begin{pmatrix} L_1C_1(M) \\ L_2C_1(M) \end{pmatrix} & \dfrac{1}{\|C_2(M)\|_2}\begin{pmatrix} L_1C_2(M) \\ L_2C_2(M) \end{pmatrix} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha(M)}{\|C_1(M)\|_2}\lambda C_1(M) & \dfrac{1}{\|C_2(M)\|_2}\mu C_2(M) \end{array}\right) \qquad \text{d'après } \spadesuit \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(M)\dfrac{C_1(M)}{\|C_1(M)\|_2} & \dfrac{C_2(M)}{\|C_2(M)\|_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \\
Mg(M) &= g(M)D,
\end{aligned}$$

ainsi $g(M)^{-1}Mg(M) = D$. Finalement la matrice $g(M)^{-1}Mg(M)$ est diagonale.

3.2.1. Soit $M \in \mathscr{S}_B$. Il existe donc $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ tel que $M = UBU^{-1}$. Puisque M et B sont semblables, alors $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(B) = \{\alpha, \beta\}$, donc M admet deux valeurs propres réelles distinctes et il s'ensuit que $M \in \mathcal{U}$. Comme $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $U^{-1} = {}^tU$ et par suite $M = UB^tU$. On a ${}^tM = {}^t({}^tU)^tD^tU = UD^tU = M$, donc $M \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. Ainsi $M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$. D'où l'inclusion $\mathscr{S}_B \subset \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

3.2.2. • Soit $M \in \mathscr{S}_B$. D'après la question précédente, on a $\mathscr{S}_B \subset \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, donc $M \in \mathcal{U} \cap \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, dès lors, selon la question **3.1.4.**, $h(M)^{-1}Mh(M) = g(M)^{-1}Mg(M)$ est diagonale.

- On a $h(M)^{-1}Mh(M)$ est semblable à M et M est semblable à B puisque $M \in \mathscr{S}_B$, donc, par transitivité, $h(M)^{-1}Mh(M)$ est semblable à B et par suite $\mathrm{Sp}(h(M)^{-1}Mh(M)) = \mathrm{Sp}(B) = \{\alpha, \beta\}$.

3.2.3. Notons $\sigma : M \longmapsto h(M)^{-1}Mh(M)$ l'application définie sur $\mathscr{S}_B$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathscr{S}_B$, d'après la question précédente, la matrice $h(M)^{-1}Mh(M)$ est diagonale et $\mathrm{Sp}(h(M)^{-1}Mh(M)) = \{\alpha, \beta\}$, donc :

$$\sigma(M) = h(M)^{-1}Mh(M) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \sigma(M) = h(M)^{-1}Mh(M) = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

ce qui implique que $\sigma(\mathscr{S}_B) \subset \left\{B, B'\right\}$ où $B' = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Montrons maintenant que l'application σ est continue. Considérons donc l'application $\Psi : (A_1, A_2, A_3) \longmapsto A_1A_2A_3$, définie sue $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^3$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et l'application $\phi : M \longmapsto (h(M)^{-1}, M, h(M))$, définie sur $\mathscr{S}_B$ et à valeurs dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^3$, de telle sorte que

$$\forall M \in \mathscr{S}_B, \quad \Psi o \phi(M) = \Phi(h(M)^{-1}, M, h(M)) = h(M)^{-1}Mh(M) = \sigma(M).$$

Il est clair que l'application Ψ est trilinéaire, donc elle continue puisque $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie. De plus l'application ϕ est continue puisque les applications $h : M \longmapsto h(M)$, $M \longmapsto h(M)^{-1}$ et $M \longmapsto M$, définies sur $\mathscr{S}_B$, sont continues, ainsi l'application $\sigma = \Psi o \phi$ est continue.

En résumé, on vient de montrer que $\sigma : \mathscr{S}_B \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est continue et que $\sigma(\mathscr{S}_B) \subset \left\{B, B'\right\}$, donc, d'après la question 2.4.2., σ est constante, c.à.d.

$$\forall M \mathscr{S}_B,\ h(M)^{-1}Mh(M) = B \quad \text{ou} \quad \forall M \mathscr{S}_B,\ h(M)^{-1}Mh(M) = B'.$$

3.2.4. Supposons qu'on n'est pas dans le cas voulu, c.à.d.

$$\forall M \mathscr{S}_B,\ h(M)^{-1}Mh(M) = B'. \quad \bigstar$$

Puisque B et B' sont diagonalisables (car elles sont diagonales) et $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B') = \{\alpha, \beta\}$, alors B et B' sont semblables, d'où l'existence de $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}B'P = B \bigstar\bigstar$. En combinant $\bigstar$ et $\bigstar\bigstar$, on obtient

$$\forall m \mathscr{S}_B \ \left(h(M)P\right)^{-1} M \left(h(M)P\right) = P^{-1}\left(h(M)^{-1}Mh(M)\right)P = P^{-1}B'P = B.$$

On en déduit que, pour se ramener au cas voulu, il suffit de remplacer l'application h par l'application $M \longmapsto h(M)P$ qui est aussi **continue**.

3.3.1. Soit $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. On a $UBU^{-1} \in \mathscr{S}_B$, donc, par hypothèse, on a

$$\left(h(UBU^{-1})\right)^{-1}(UBU^{-1})h(UBU^{-1}) = B$$

ou encore

$$\left(U^{-1}h(UBU^{-1})\right)^{-1} B \left[\left(U^{-1}h(UBU^{-1})\right)^{-1}\right] = I_2BI_2^{-1},$$

donc, d'après la question **1.2.2.**, la matrice $I_2^{-1}\left(U^{-1}h(UBU^{-1})\right)^{-1} = h(UBU^{-1})^{-1}U$ est diagonale, c.à.d. il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $h(UBU^{-1})^{-1}U = \mathrm{diag}(a, b)$. En vertu de la question **3.1.3.**, on a $h(UBU^{-1}) = g(UBU^{-1}) \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, donc, d'après la question **2.2.**, $h(UBU^{-1})^{-1} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et, comme $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors, d'après la question **2.2.**, $\mathrm{diag}(a,b) = h(UBU^{-1})^{-1}U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que ${}^t\mathrm{diag}(a,b)\,\mathrm{diag}(a,b) = I_1$ et $\det(\mathrm{diag}(a,b))$, c.à.d. $a^2 = b^2 = 1$ et $ab = 1$ et par suite $(a,b) = \pm(1,1)$. Finalement

$$h(UBU^{-1})^{-1}U = \mathrm{diag}(a,b) = \pm I_2.$$

3.3.2. • Pour tout $U \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\psi\mathrm{o}\varphi(U) &= \psi(\varphi(M))\\ &= \psi\left(UBU^{-1}, h(UBU^{-1})^{-1}U\right)\\ &= h(UBU^{-1})h(UBU^{-1})^{-1}U\\ &= U\\ &= \mathrm{Id}_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}(U),\end{aligned}$$

donc $\psi\mathrm{o}\varphi = \mathrm{Id}_{\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$.

• Pour tout $(M,D) \in \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi\mathrm{o}\psi(M,D) &= \varphi\left(\psi(M,D)\right)\\ &= \varphi\left(h(M)D\right)\\ &= \left(h(M)DB\left(h(M)D\right)^{-1}, h\left(h(M)DB\left(h(M)D\right)^{-1}\right)^{-1}h(M)\right)\\ &= \left(h(M)DBD^{-1}h(M)^{-1}, h\left(h(M)DBD^{-1}h(M)^{-1}\right)^{-1}h(M)D\right)\\ &= \left(h(M)Bh(M)^{-1}, h\left(h(M)Bh(M)^{-1}\right)^{-1}h(M)D\right) \quad \text{car } D = \pm I_2, \text{ donc } DBD^{-1} = DD^{-1}B = B\\ &= \left(M, h(M)^{-1}h(M)D\right) \qquad \text{car } h(M)^{-1}Mh(M) = B, \text{ donc } h(M)Bh(M)^{-1} = M\\ &= (M,D)\\ &= \mathrm{Id}_{\mathscr{S}_S\times\{-I_2,I_2\}}(M,D),\end{aligned}$$

donc $\varphi\mathrm{o}\psi = \mathrm{Id}_{\mathscr{S}_2\times\{-I_2,I_2\}}$

• Conclusion : les applications ψ et φ sont bijectives et $\psi^{-1} = \varphi$.

3.3.3. • L'application $F : U \longmapsto \mathrm{tr}\left(h(UBU^{-1})^{-1}U\right)$, définie sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs réelles, est continue car c'est une composée d'applications continues.

• D'après la question **3.3.1.**, on a

$$\forall M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad h(M)^{-1}Mh(M) = -I_2 \ \text{ ou } \ h(M)^{-1}Mh(M) = I_2,$$

donc

$$\forall M \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\left(h(M)^{-1}Mh(M)\right) = \mathrm{tr}(-I_2) = -2 \ \text{ ou } \ \mathrm{tr}\left(h(M)^{-1}Mh(M)\right) = \mathrm{tr}(I_2) = 2,$$

dès lors $F(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) \subset \{-2, 2\}$.

On a $(B, I_2), (B, -I_2) \in \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\}$ et l'application $\varphi : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}_B \times \{-I_2, I_2\}$ est bijective d'après la question précédente, donc il existe $U, U' \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$\varphi(U) = \left(UBU^{-1}, h(UBU^{-1})^{-1}U\right) = (B, I_2) \text{ et } \varphi(U') = \left(U'BU'^{-1}, h(U'BU'^{-1})^{-1}U'\right) = (B, -I_2),$$

puis

$$h(UBU^{-1})^{-1}U = I_2 \text{ et } h(U'BU'^{-1})^{-1}U' = -I_2,$$

par suite $F(U) = \mathrm{tr}\left((UBU^{-1})^{-1}U\right) = \mathrm{tr}(I_2) = 2$ et $F(U') = \mathrm{tr}\left((U'BU'^{-1})^{-1}U'\right) = \mathrm{tr}(-I_2) = -2$. D'où l'inclusion $\{-2, 2\} \subset F(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}))$. Finalement $F(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) = \{-2, 2\}$.

3.3.4. D'après les questions **2.3.1.** et **3.3.3.**, les applications Φ et F sont continues, donc l'application

$$F o \Phi : \mathbb{R} \xrightarrow{\Phi} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

est continue et par suite[6] $Fo\Phi(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. En vertu des questions **2.3.2.** et **3.3.3.**, on a

$$Fo\Phi(\mathbb{R}) = F\left(\Phi(\mathbb{R})\right) = F((\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})) = \{-2, 2\},$$

ce que contredit le fait que $Fo\Phi(\mathbb{R})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Ainsi l'hypothèse "Il existe une application $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ continue, à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et telle que, pour tout $m \in U$, la matrice $f(M)^{-1}Mf(M)$ soit diagonale" est fausse.

6. l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle